7-я Межрегиональная олимпиада для учителей по математике Казань, 25.04.2021

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу kazan-mat@mail.ru. Общие комментарии по задачам смотрите на странице http://www.kazan-math.info. На этой же странице Вы найдете ссылку на форму для вбивания ответов. Для Вашего удобства предлагается решить задачи, перенести ответы себе на черновик и затем по черновику заполнить форму для ответов. Правильный ответ оценивается в 2 балла, неправильный — в 0 баллов, ответ «не знаю» оценивается в 1 балл. Напоминаем, что возможность отправить ответы закроется в 13:00 по Московскому времени.

Желаем успеха!

1. *а*) Поезд проехал половину пути за 3 часа, после чего увеличил скорость в полтора раза. На вторую половину пути он затратил

(I) 2 часа; **(II)** 3 часа; **(III)** 4,5 часа; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) Поезд ехал половину пути со скоростью 60 *км/ч*, а половину времени — со скоростью 40 *км/ч*. Остальное время он двигался со скоростью 20 *км/ч*. Его средняя скорость равна

(I) 40 *км/ч*; **(II)** 45 *км/ч*; **(III)** 50 *км/ч*; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Поезд ехал половину пути со скоростью 40 *км/ч*, а половину времени — со скоростью 60 *км/ч*. Остальное время он двигался со скоростью 20 *км/ч*. Его средняя скорость равна

(I) 40 *км/ч*; **(II)** 45 *км/ч*; **(III)** 50 *км/ч*; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) Поезд ехал половину пути со скоростью v_1 *км/ч*, а половину времени — со скоростью v_2 *км/ч*. При каком условии на v_1, v_2 это возможно?

(I) ни при каких v_1, v_2; **(II)** только при $v_1 = v_2$; **(III)** только при $v_1 \geqslant v_2$; **(IV)** только при $v_1 \leqslant v_2$; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

2. *а*) Имеется забор длиной 88 метра. Можно ли с его помощью оградить участок прямоугольной формы площадью 480 $м^2$?

(I) да; **(II)** нет; **(III)** невозможно определить однозначно; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Какова наибольшая площадь участка прямоугольной формы, который можно оградить забором длиной 88 метра?

(I) 480; **(II)** 482; **(III)** 484; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Какова наименьшая длина забора, с помощью которого можно оградить участок прямоугольной формы площадью 400 $м^2$?

(I) 100; **(II)** 40; **(III)** 80; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Имеется забор длиной 88 метра. Можно ли с его помощью оградить участок площадью более 600 $м^2$ необязательно прямоугольной формы?

(I) *да*; **(II)** *нет*; **(III)** среди приведённых ответов нет правильного; **(IV)** не знаю.

3. У Пети есть кубики одинаковой формы разного цвета: 2 красных, 3 синих и 4 зелёных. Петя строит из них башню, ставя каждый следующий кубик на предыдущий.

а) Сколько различных башен высотой 2 кубика может построить Петя?

(I) 8; **(II)** 9; **(III)** 36; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Сколько различных башен высотой 3 кубика может построить Петя?

(I) 84; **(II)** 18; **(III)** 26; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Сколько различных башен высотой 9 кубиков может построить Петя?

(I) 1260; **(II)** 120960; **(III)** 362880; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Сколько различных башен высотой 8 кубиков может построить Петя? (Один кубик не будет использоваться.)

(I) 1260; **(II)** 40320; **(III)** 13440; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

4. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор.

а) Какое наименьшее возможное количество *положительных* чисел может быть в таком наборе?

(I) 1; **(II)** 2; **(III)** 3; **(IV)** 4; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) В наборе 10 чисел. Какое наибольшее возможное количество *положительных* чисел может быть в этом наборе?

(I) 9; **(II)** 8; **(III)** 7; **(IV)** 5; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Какое наименьшее возможное количество чисел может быть *во всём* наборе?

(I) 7; **(II)** 6; **(III)** 5; **(IV)** 4; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) Одно из чисел набора равно 0. Какое наименьшее количество чисел в таком наборе?

(I) 7; **(II)** 6; **(III)** 5; **(IV)** 4; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Медианы треугольников ABC, BCD и ADC пересекаются в точках K, L и M соответственно.

а) Найдите отношение $BD : KM$.

(I) $2:1$; **(II)** $3:1$; **(III)** $4:1$; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Отрезки BM и DK пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников BOD и KOM.

(I) $9:4$; **(II)** $4:1$; **(III)** $9:1$; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Найдите отношение $AD : KL$.

(I) $2:1$; **(II)** $3:1$; **(III)** $4:1$; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Отрезки AL и DK пересекаются в точке P. Найдите отношение $AP : PL$.

(I) 2 : 1; **(II)** 3 : 1; **(III)** 4 : 1; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

6. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$.

а) Чему равно значение $f(1)$?

(I) 0; **(II)** 1; **(III)** невозможно определить; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Существует ровно одна функция f, удовлетворяющая условиям задачи?

(I) да, верно; **(II)** нет ни одной такой функции f; **(III)** таких функций f бесконечно много; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Известно, что $f(2021) = 1$. Чему равно значение $f\left(\frac{1}{2021}\right)$?

(I) 0; **(II)** 1; **(III)** -1; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Может ли равенство $f(x) = -f(x^{-1}) + 1$ выполняться хотя бы для одного положительного x?

(I) да, может; **(II)** нет, не может; **(III)** среди приведённых ответов нет правильного; **(IV)** не знаю.

7. *а*) Максимум функции $\cos x + \sin x$ равен:

(I) 2; **(II)** $\sqrt{3}$; **(III)** $\sqrt{2}$; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Пусть $a = \max(2\cos x + \sin x)$, $b = \min(\cos x - 2\sin x)$. Какое из утверждений верно?

(I) $a = b$; **(II)** $a = -b$; **(III)** $|a| > |b|$; **(IV)** $|a| < |b|$; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Максимум функции $f(x) = 7\cos x + 3\cos 3x$ равен

(I) 4; **(II)** 10; **(III)** $\frac{64}{9}$; **(IV)** $\sqrt{58}$; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) Максимум функции $f(x) = 7\cos x - 3\cos 3x$ равен

(I) 4; **(II)** 10; **(III)** $\frac{64}{9}$; **(IV)** $\sqrt{58}$; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

8. При исследовании крови у 6% здоровых пациентов анализ показывает наличие антител (ложноположительный анализ, ошибка 1 рода), у 4% переболевших антитела не обнаруживаются (ложноотрицательный анализ, ошибка 2 рода).

а) Пусть в популяции переболел один на каждую сотню человек. Какова вероятность того, что у произвольного человека при обследовании не будут обнаружены антитела? (Округлите до целого числа процентов.)

(I) 93%; **(II)** 94%; **(III)** 96%; **(IV)** 99%; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) Пусть в популяции переболели 10 на каждую сотню человек. Какова вероятность того, что у произвольного человека при обследовании будут обнаружены антитела?

(I) 4%; **(II)** 6%; **(III)** 10%; **(IV)** 15%; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

Назовем *надежностью анализа* долю переболевших среди тех, у кого анализ показал наличие анитител.

в) Пусть в популяции переболели 10 на каждую сотню человек. Какова надежность анализа в этом случае?

(I) 64%; **(II)** 85%; **(III)** 94%; **(IV)** 96%; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) При каком числе переболевших надежность анализа равна $0,8$? (В расчете на сотню человек, округлите до целого числа.)

(I) 12; **(II)** 20; **(III)** 80; **(IV)** 83; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ провели биссектрисы всех его внутренних углов и подсчитали точки, в которых они пересекаются (возможно, вне четырёхугольника).

а) Оказалось, что все биссектрисы пересекаются в одной точке. Этот четырёхугольник

(I) обязательно квадрат; **(II)** обязательно ромб; **(III)** обязательно имеет параллельные стороны; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) Оказалось, что все биссектрисы пересекаются в точке O. Какое из утверждений верно для каждого такого четырёхугольника:

(I) $AC+BD=AO+BO+CO+DO$; **(II)** $AB+AD=BC+BD$; **(III)** $AB+CD=AC+BD$; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Оказалось, что точек пересечения биссектрис ровно две. Какое из утверждений верно:

(I) четырёхугольник является параллелограммом; **(II)** четырёхугольник является трапецией; **(III)** четырёхугольник является ромбом; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) Оказалось, что точек пересечения биссектрис ровно четыре. Какое из утверждений верно:

(I) четырёхугольник является параллелограммом; **(II)** четырёхугольник является трапецией; **(III)** четырёхугольник является ромбом; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

10. В заданиях *а*)–*в*) рассматриваются тетраэдры, у которых площадь основания равна 30, а все боковые грани образуют углы 60° с основанием.

а) Площадь полной поверхности такого тетраэдра равна

(I) 60; **(II)** 90; **(III)** $15\sqrt{3}$; **(IV)** $30+15\sqrt{3}$; **(V)** недостаточно данных для решения задачи; **(VI)** не знаю.

б) Пусть периметр основания равен $20\sqrt{3}$. Высота тетраэдра равна:

(I) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; **(II)** 3; **(III)** $1,5$; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Пусть высота тетраэдра равна 10. Его объём равен

(I) 100; **(II)** $30\sqrt{3}$; **(III)** $15\sqrt{3}$; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) У тетраэдра $ABCD$ боковые грани наклонены под углом 30° к плоскости основания ABC. Площадь основания тетраэдра равна 30. Площадь полной поверхности тетраэдра равна

(I) 60; **(II)** 90; **(III)** $15\sqrt{3}$; **(IV)** $30+15\sqrt{3}$; **(V)** недостаточно данных для решения задачи; **(VI)** не знаю.

1. *а) Ответ:* **(I)**.

Очевидно.

б) Ответ: **(II)**.

в) Ответ: **(IV)**.

г) Ответ: **(III)**.

Пусть поезд прошел путь, равный $2S$, за время $2T$. Разделим весь путь на три промежутка, пройденные с постоянными скоростями (см. таблицу). Ясно, что должны выполняться неравенства $T \geqslant t$, $S \geqslant s$, то есть $T \geqslant \frac{S}{v_1}$, $S \geqslant v_2 T$, откуда $v_2 T \leqslant S \leqslant v_1 T$.

Итак, ситуация возможна только при $v_2 \leqslant v_1$.

В частности, в пункте *в*) ответ «ситуация невозможна».

В пункте *б*) имеем $S - s = 20(T - t)$, исключая из равенства t, s, получим $S - 40T = 20(T - S/60)$, откуда $4S = 180T$. Значит, средняя скорость равна $S/T = 45$ (*км/час*).

Скорость	Время	Путь
v_1	t	S
v_2	T	s
v	$T - t$	$S - s$
Всего	$2T$	$2S$

2. *а) Ответ:* **(I)**.

Например, можно оградить прямоугольник со сторонами 20 и 24, его площадь $20 \cdot 24 = 480$ *м*^{2}.

б) Ответ: **(III)**.

Площадь прямоугольного участка со сторонами a и b равна ab. В силу неравенства о среднем арифметическом и геометрическом $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$, и значит, $S \leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$, причём знак равенства только при $a = b$. В этом случае участок имеет форму квадрата со стороной $a = 22$ и площадью $22^2 = 484$.

в) Ответ: **(III)**.

В силу неравенства о среднем арифметическом и геометрическом $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$, и значит, при $S = ab = 400$ отсюда получаем $20 \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$, причём знак равенства возможен только при $a = b = 20$. Квадратный участок со стороной $a = 20$ имеет наименьший среди всех прямоугольников периметр 80.

г) Ответ: **(II)**.

Попробуем взять участок в форме круга радиуса r. Для того чтобы оградить такой участок, нужен забор длиной $2\pi r = 88$, при этом радиус r круга равен $\frac{44}{\pi} \approx 14$, а его площадь — $\pi r^2 > 600$ *м*^{2}.

3. *а) Ответ:* **(II)**.

Цвет каждого из двух кубиков — красный, синий или зелёный, то есть возможны три варианта. Значит, общее число всех комбинаций $3^2 = 9$.

б) Ответ: **(III)**.

Если самый нижний кубик башни синий или зелёный, то для цвета каждого из двух остальных кубиков есть три варианта (красный, синий или зелёный). Значит, таких башен будет $9 + 9 = 18$. Пусть цвет нижнего кубика — красный. Расположенный над ним кубик может быть любого цвета. Но если этот кубик красного цвета, то для цвета третьего кубика есть только две возможности — синий или зелёный. Если же стоящий над ним кубик

— синий или зелёный, то цвета третьего кубика — красный, синий или зелёный. Таким образом, всего $2 + 3 + 3 = 8$ варианта.

Общее количество башен из 3 кубиков — $18 + 8 = 26$.

в) *Ответ:* **(I)**.

Если бы все кубики были разного цвета, то получилось бы 9! башен. В нашем случае от перестановки любых двух красных, либо трёх синих, либо 4 зелёных, башня не меняется. Поэтому различных башен из 9 кубиков будет $\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!} = 1260$.

г) *Ответ:* **(I)**.

Подсчитаем количество различных башен из 8 кубиков, в которых не использовался

а) красный кубик, их число $\frac{8!}{1!\cdot 3!\cdot 4!} = 280$;

б) синий кубик, их число $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 4!} = 420$;

в) красный кубик, их число $\frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = 560$.

Таким образом, всего можно построить $280 + 420 + 560 = 1260$ различных башен.

4. *а*) *Ответ:* **(III)**.

Пусть M — наибольшее число набора. Если оно отрицательно или равно 0, то остальные числа в наборе отрицательны, и сумма любых двух из них меньше M, противоречие. Значит, наибольшее число M набора положительно. Очевидно, числа x и y, которые в сумме дают M, тоже положительны, так что в наборе *не менее трёх* положительных чисел.

Набор $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ удовлетворяет условию и содержит ровно три положительных числа.

б) *Ответ:* **(III)**.

Рассматривая наименьшее число m набора, как и в пункте *а*) доказывается, что в наборе не менее трёх отрицательных чисел. Поэтому в в наборе не может быть более семи положительных чисел. Пример набора из 7 положительных чисел: $-3, -2, -1, 1, 2, \ldots, 7$.

в) *Ответ:* **(II)**.

В пунктах *а*) и *б*) установлено, что в наборе не менее трёх отрицательных и не менее трёх положительных чисел. Значит, в наборе *не меньше шести* чисел. Приведённый в пункте *а*) набор содержит ровно шесть чисел.

г) *Ответ:* **(I)**.

В наборе не менее трёх отрицательных и не менее трёх положительных чисел. Поскольку 0 не относится ни к тем, ни к другим, должно быть не менее семи чисел. Пример: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

5. *а*) *Ответ:* **(II)**.

(Рис. 1.) Пусть S — середина AC. Так как BS и DS — медианы треугольников ABC и ADC, то $BS : KS = 3 : 1$ и $DS : MS = 3 : 1$. Треугольники SBD и SKM подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому $BD : KM = 3 : 1$.

б) *Ответ:* **(III)**.

(Рис. 1.) Как доказано в пункте *а*), треугольники SBD и SKM подобны, поэтому $BD \parallel KM$, то есть $BKMD$ — трапеция. Значит, треугольники BOD и MOK также подобны. Поскольку коэффициент подобия равен $BD : KM = 3 : 1$, их площади относятся как $9 : 1$.

в) *Ответ:* **(II)**.

(Рис. 2.) Пусть T — середина BC. Так как AT и DT — медианы треугольников ABC и BCD, то $AT : KT = 3 : 1$ и $DT : LT = 3 : 1$. Треугольники TAD и TKL подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому $AD : KL = 3 : 1$.

г) Ответ: **(II)**.

(Рис. 2.) Как доказано в пункте *в*), треугольники TAD и TKL подобны, поэтому $AD \parallel KL$, то есть $AKLD$ — трапеция. Значит, треугольники APD и LPK также подобны, причём $AP : PL = AD : KL = 3 : 1$.

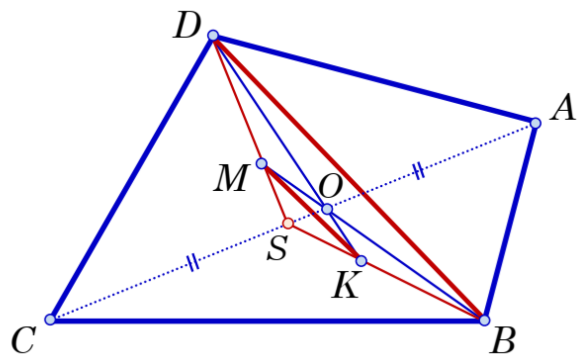

Рис. 1

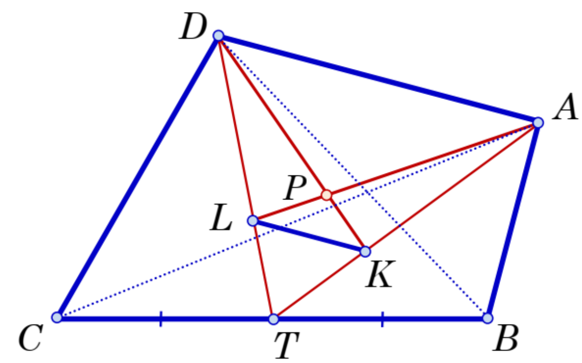

Рис. 2

6. *а) Ответ:* **(I)**.

При $y = 1$ исходное равенство примет вид: $f(x) = f(x) + f(1)$, и значит, $f(1) = 0$.

б) Ответ: **(III)**.

Условию задачи удовлетворяют, например, функции вида $f(x) = \log_a x$, где a — произвольное положительное число, $a \neq 1$.

в) Ответ: **(III)**.

Пусть $x = 2021$, $y = \frac{1}{2021}$, тогда $f(1) = f(2021) + f\left(\frac{1}{2021}\right)$. В пункте *а*) доказано, что $f(1) = 0$, поэтому $f\left(\frac{1}{2021}\right) = -f(2021) = -1$.

г) Ответ: **(II)**.

Для функции f выполняется свойство $f(x^{-1}) = -f(x)$. Это доказывается так же, как в пункте *в*). Если равенство $f(x) = -f(x^{-1}) + 1$ возможно, то $f(x) = f(x) + 1$, противоречие.

7. *а) Ответ:* **(III)**.

Имеем $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Значит, максимум такой функции равен $\sqrt{2}$.

б) Ответ: **(II)**.

Поскольку $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$, максимум такой функции равен $\sqrt{a^2+b^2}$, минимум равен $-\sqrt{a^2+b^2}$.

в) Ответ: **(II)**.

Ясно, что значение функции не превосходит $7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 10$, причем это значение достигается при $x = 0$.

г) Ответ: **(III)**.

Дифференцируемая функция достигает максимума на границах области определения, либо в точках, где производная обращается в 0. Имеем

$$f'(x) = -7\sin x + 9\sin 3x = -7\sin x + 9\sin x\,(3 - 4\sin^2 x) = \sin x\,(20 - 36\sin^2 x).$$

Это выражение обращается в 0, когда 1) $\sin x = 0$ или 2) $\sin^2 x = \frac{5}{9}$. В первом случае $x = \pi k$, так что $\cos x = \cos 3x = \pm 1$, значение функции равно ± 4. Во втором случае $\cos^2 x = \frac{4}{9}$, $\cos x = \pm\frac{2}{3}$.

Выражение для функции можно преобразовать так:

$$f(x) = 7\cos x - 3\cos 3x = 7\cos x - 3\cos x\,(4\cos^2 x - 3) = \cos x\,(16 - 12\cos^2 x).$$

Подставляя $\cos x = \pm\frac{2}{3}$, получаем значения функции, равные $\pm\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{3} = \pm\frac{64}{9}$. Наибольшим из четырёх вычисленных значений будет $\frac{64}{9}$.

8. Пусть переболело n человек на каждую сотню. Тогда в пересчете на 100 пациентов анализ окажется положительным у $0,06(100-n)$ здоровых людей и $0,96n$ переболевших, всего $6+0,9n$. Эта величина составляет долю $(6+0,9n)/100 = 0,06+0,009n$ от всех обследованных.

а) *Ответ:* (**I**).

При $n=1$ имеем $0,069$ положительных анализов, то есть $0,931 = 93,1\%$ отрицательных.

б) *Ответ:* (**IV**).

При $n=10$ имеем $0,15$ положительных анализов, то есть 15%.

в) *Ответ:* (**I**).

При $n = 10$ на 100 человек будет 15 с положительным анализом, среди которых $0,96n = 9,6$ действительно переболели. Их доля составляет $9,6/15 = 0,64 = 64\%$.

г) *Ответ:* (**II**).

Надежность анализа вычисляется по формуле $\frac{0,96n}{6+0,9n} = \frac{0,32n}{2+0,3n} = 0,8$, откуда $0,32n = 1,6+0,24n$, то есть $n=20$.

9. *а*) *Ответ:* (**V**).

Пусть биссектрисы l_A, l_B, проведённые из вершин A и B, пересекаются в точке O. Эта точка равноудалена от сторон AB, BC и AD. Если через эту точку проходит ещё хотя бы одна биссектриса (l_C или l_D), то все стороны четырёхугольника равноудалены от O, четырёхугольник — описанный. Он может не быть ни параллелограммом, ни трапецией, то есть в пункте *а*) не предложен правильный ответ.

б) *Ответ:* (**III**).

Для описанного четырёхугольника выполняется равенство (**III**) — суммы длин противоположных сторон равны. Утверждение (**I**) означает, что O лежит на пересечении диагоналей, но это верно не для всякого описанного четырёхугольника. Например, для равнобокой описанной трапеции не выполняются ни (**I**), ни (**II**).

в) *Ответ:* (**IV**).

Итак, если три биссектрисы пересекаются в одной точке, то и четвёртая проходит через неё. В пунктах *в*) и *г*) точек пересечения больше. Значит, никакие три биссектрисы не пересекаются в одной точке. Легко показать, что «соседние» биссектрисы обязательно пересекаются, что даёт как минимум 4 точки пересечения. Поэтому ситуация, описанная в пункте *в*), невозможна.

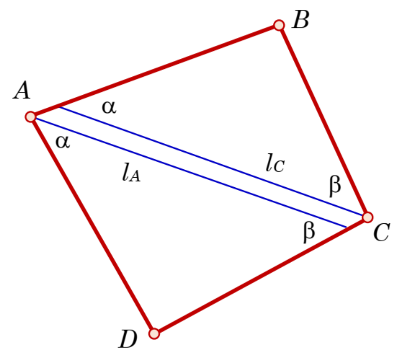

Рис. 3

г) *Ответ:* (**I**).

(Рис. 3.) Кроме того, число точек пересечения не меньше, чем число пар соседних вершин, то есть не менее 4. В этом случае биссектрисы, проведенные из противоположных вершин, не могут пересекаться ни в одной из этих четырёх точек. Значит, они параллельны друг другу.

Если биссектрисы l_A и l_C параллельны, то, как видно из рисунка, углы B и D равны. Аналогично получаем, что совпадают углы A и C. Значит, четырехугольник — параллелограмм (но не ромб).

Замечание. В варианте (**I**) не указано, что четырёхугольник не может быть ромбом. Это не делает ответ (**I**) неверным, так как в нём не сказано, что любой параллелограмм подходит под условие задачи.

10. *а) Ответ:* **(II)**.

Если фигуру площадью S спроецировать на плоскость α, площадь проекции будет равна $S\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью фигуры и α. В данном случае проекции боковых граней на основание заполняют это основание, то есть $30 = S\cos 60^\circ = S/2$, где S — суммарная площадь боковых граней. Итак, $S = 60$, а полная площадь поверхности составляет 90.

б) Ответ: **(II)**.

Известно, что при фиксированном периметре максимальной площадью обладает равносторонний треугольник со стороной $a = \frac{P}{3}$, то есть $S \leqslant \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{P^2\sqrt{3}}{36}$. В варианте (**II**) это соотношение выполняется: $\frac{400\cdot 3\sqrt{3}}{36} = \frac{100\sqrt{3}}{3} > 30$. Треугольник такой площади и периметра всегда можно подобрать (например, среди равнобедренных).

Зная периметр и площадь основания, можно вычислить радиус вписанной в него окружности, исходя из формулы $S = \frac{1}{2}rP$. Имеем $r = \frac{2S}{P} = \frac{2\cdot 30}{20\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. С другой стороны, вершина D проецируется в центр вписанной окружности основания (легко доказываемый факт), так что высота трапеции равна $H = r\operatorname{tg}60^\circ = r\sqrt{3} = 3$.

в) Ответ: **(IV)**.

По доказанному ранее $r = \frac{H}{\sqrt{3}}$, откуда $S = \frac{H\sqrt{3}}{6}P$, что должно удовлетворять выведенному выше неравенству. Оно принимает вид $\frac{H\sqrt{3}}{6}P \leqslant \frac{P^2\sqrt{3}}{36}$, то есть $P \geqslant 6H$ и $S = \frac{H\sqrt{3}}{6}P \geqslant H^2\sqrt{3}$, что противоречит условию задачи.

г) Ответ: **(V)**.

В отличие от задания *а*) плоскость боковой грани может быть наклонена «вовне» тетраэдра, то есть внутренний угол между гранью и основанием составит 150°. При этом проекции боковых граней могут выходить за пределы основания, так что нельзя утверждать, что сумма их площадей равна 30. В этом случае 30 является «алгебраической суммой» проекций, то есть некоторые из них могут входить в сумму «с минусом». Например, если $30 = S_1 + S_2 - S_3$, то сумму $S_1 + S_2 + S_3$ по этим данным определить невозможно. Кроме того, мы не знаем, какой именно из вариантов расстановки знаков реализовался.