7-я Межрегиональная олимпиада для учителей по математике Казань, 7.10.2021

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу kazan-mat@mail.ru.

Общие комментарии по задачам и правила отправки работы смотрите на сайте http://www.kazan-math.com. Рекомендуем Вам периодически обновлять страницу, чтобы видеть самые последние общие комментарии.

Желаем успеха!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

1. «Нехорошая квартира», в которой происходило действие романа М.А.Булгакова «Мастер и Маргарита», расположена на 5 этаже в доме 302-бис и имеет номер 50. Будем считать, что в доме четыре одинаковых подъезда, пронумерованных слева направо. Если же нумеровать их справа налево, то номер этой квартиры будет 82 (внутри подъезда порядок нумерации не меняется). Сколько этажей в доме? Считаем, что на каждом этаже число квартир одинаковое.

2. *а*) Существуют ли 100 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из заданных чисел?

б) Существуют ли 100 различных натуральных чисел, сумма которых делится на сумму любых двух из данных чисел?

3. *а*) Функция $f(x)$ задана на всей числовой оси, причём для всех x выполняются неравенства: $f(x+3) \leqslant f(x) \leqslant f(x+4)$. Докажите, что функция $f(x)$ — периодическая. Придумайте хотя бы одну функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

б) Существует ли функция $f(x)$, для которой при всех x справедливы неравенства $f(x+3) \leqslant f(x) < f(x+4)$?

4. Алекс и Том загадали два четырёхзначных числа, и у каждого из них оказалось столько же простых делителей, сколько и составных. Найдите наибольшее возможное значение разности этих чисел.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, M — середина AB. Прямая $A'B'$ пересекает продолжение стороны AB в точке D. Докажите, что прямая MH перпендикулярна прямой CD.

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, и написать верное решение. Максимальный балл за каждую из задач этого блока также равен 7.

6. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2} \leqslant 2.$$

«Решение». Пусть $M(x;y)$ — точка координатной плоскости Oxy, тогда левая часть этого уравнения есть сумма расстояний от точки M до точек $A(0;0)$ и $B(2;0)$.

В треугольнике ABM сумма длин двух сторон AM и BM больше длины третьей стороны AB, которая, очевидно, равна 2. Поэтому $AO + BO > 2$, то есть левая часть исходного неравенства всегда больше правой части.

«Ответ:» нет решений.

7. Решите уравнение:

$$x^{x^{x^{\cdots}}} = \log_x 4.$$

«Решение». Ясно, что $x > 0$ и $x \neq 1$. Перепишем уравнение в виде $x^{\left(x^{x^{x^{\cdots}}}\right)} = 4$. Так как $\left(x^{x^{x^{\cdots}}}\right)$ тоже равно 4, то исходное уравнение равносильно $x^4 = 4$, то есть $x = \pm\sqrt{2}$. С учётом ограничения $x > 0$ получаем

«Ответ:» $x = \sqrt{2}$.

8. В коробке лежат 40 карандашей разной длины и нескольких цветов, среди них ровно 5 красных. Сколькими способами можно выбрать 10 карандашей так, чтобы среди них был хотя бы один красного цвета?

«Решение». Один красный карандаш можно выбрать пятью способами. Затем достаточно выбрать любые 9 карандашей из осташихся 39. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{39}^{9}. Так как оба выбора происходят независимо, то искомое количество способов равно $5 \cdot C_{39}^{9}$.

«Ответ:» $5 \cdot C_{39}^{9}$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2, \\ \quad xy \quad = 2a^2 + 3a. \end{cases}$$

«Решение». Система уравнений не меняется, если одновременно заменить x на y, а y — на x. То же самое верно, если заменить x на $-x$ и y на $-y$. Другими словами, если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то решениями будут и $(y_0; x_0)$, $(-x_0; -y_0)$. Поскольку система имеет ровно два решения, какие-то два из них совпадают. Пусть $(x_0; y_0)$ — одно из совпадающих, тогда возможны два случая:

1) $(x_0; y_0) = (y_0; x_0)$, то есть $x_0 = y_0$, и

2) $(x_0; y_0) = (-x_0; -y_0)$, то есть $x_0 = -x_0 = 0$, $y_0 = -y_0 = 0$.

В последнем случае также $x = y$, поэтому достаточно разобрать только первый случай.

Подставим $y = x$ в уравнения системы. Тогда из первого уравнения получим $2x^2 = 2a^2$, а из второго $x^2 = 2a^2 + 3a$. Значит, $a^2 = 2a^2 + 3a$, откуда $a = 0$, $a = -3$.

«Ответ:» $a = 0$, $a = -3$.

10. Решите уравнение: $x^2 - 6 = \sqrt{x + 6}$.

«Решение». Воспользуемся следующим известным фактом: пусть $f(x)$ — возрастающая функция, тогда уравнения $f(f(x)) = x$ и $f(x) = x$ равносильны.

Введем функцию $f(x) = \sqrt{x + 6}$, заданную для всех $x \geqslant -6$. Уравнение имеет вид $f^{-1}(x) = f(x)$ или $x = f(f(x))$. В силу того, что функция f — возрастающая, уравнение равносильно $f(x) = x$, то есть соотношению $\sqrt{x + 6} = x$, которое легко сводится к квадратному. Ясно, что $x \geqslant 0$; при этом условии уравнение принимает вид $x^2 - x - 6 = 0$. Из двух корней -2 и 3 подходит только $x = 3$.

«Ответ». $x = 3$.

1. *Ответ:* 8 этажей.

Пусть в каждом подъезде n квартир. Пусть также внутри своего подъезда «нехорошая квартира» имеет номер m, причём $m \leqslant n$. Ясно, что квартира 50 находится ближе к левой стороне дома, то есть в первом или втором подъезде. Рассмотрим эти случаи.

а) «Нехорошая квартира» в первом подъезде, тогда $m = 50$. Справа от него три подъезда, поэтому при другой нумерации подъездов номер этой квартиры будет $82 = 3n+50$, и значит, $3n = 32$, что невозможно.

б) «Нехорошая квартира» во втором подъезде, тогда $50 = n + m$, $82 = 2n + m$, и значит, $n = 32$ и $m = 18$. Если на каждом этаже x квартир, то $4x < 18 \leqslant 5x$, то есть $x = 4$. Отсюда количество этажей в доме равно $n : x = 8$.

2. *Ответ:* а) существуют; б) не существуют.

а) Например, подходят числа $1, 2, 3, 6, 12, \ldots$, где каждое следующее число равно сумме всех предыдущих.

б) Упорядочим исходные числа a_i в порядке убывания: $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$. Пусть S — сумма всех чисел a_i. Группируя любую пару слагаемых в сумме S и заменяя каждое из остальных 98 слагаемых на a_1, получим $S < s_k + 98a_1$, где s_k — сумма произвольных двух чисел a_i. Среди всех попарных сумм выберем 99 сумм вида $s_i = a_1 + a_i$, $2 \leqslant i \leqslant 100$. Тогда

$$1 < \frac{S}{s_i} < \frac{s_i + 98a_1}{s_i} < 1 + 98 \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_i} < 1 + 98.$$

По условию $S/s_1, S/s_2, \ldots, S/s_{99}$ — различные натуральные числа, причём из интервала $(1;\, 99)$, противоречие.

3. *Ответ:* а) например, $f(x) = |\sin(\pi x)|$.

а) Из условия $f(x+3) \leqslant f(x+4)$. Подставив $x-3$ вместо x, получим $f(x) \leqslant f(x+1)$. Применим это неравенство несколько раз:

$$f(x) \leqslant f(x+1) \leqslant f(x+2) \leqslant f(x+3) \leqslant f(x).$$

(Последнее неравенство следует из условия.) Отсюда следует, что $f(x) = f(x+1) = f(x+2) = f(x+3)$, то есть функция $f(x)$ имеет период $T = 1$.

б) Повторяя рассуждения из пункта *а*), получим противоречивую цепочку неравенств $f(x) \leqslant f(x+1) \leqslant f(x+2) \leqslant f(x+3) < f(x)$. Значит, требуемой функции $f(x)$ не существует.

4. *Ответ:* 8 040.

Если число n содержит более двух простых делителей с учётом их кратности, то для каждого простого делителя p число n/p — составное (и все эти числа различные). Кроме того, число n делится на само себя, поэтому составных делителей больше, чем простых. Значит, простых делителей *не больше двух*. Легко видеть, что один быть тоже не может, а тогда их два, то есть $n = pq$, где p, q — простые. Но составной делитель тут только один — это pq. Значит, $p = q$, то есть $n = p^2$.

Разность загаданных чисел равна $d = p^2 - q^2$, причём и p^2, и q^2 не меньше 1 000 и меньше 10 000, то есть $32 \leqslant p, q < 100$. Так как p, q — простые, то $37 \leqslant q < p \leqslant 97$, и значит, наибольшее значение d равно $97^2 - 37^2 = 8\,040$.

5. (Рис. 1.) Опустим перпендикуляр HN из точки H на прямую CD. Поскольку углы $CA'H$, $CB'H$ и CNH прямые, точки A', B' и N лежат на окружности с диаметром CH, и значит, вписанные в эту окружность углы CNA' и $CB'A'$ равны (рис. 2).

Аналогично, четырехугольник $AB'A'B$ вписан в окружность с диаметром AB, поэтому $\angle CB'A' = \angle ABC$. Таким образом, $\angle DNA' + \angle ABC = 180^\circ - \angle CNA' + \angle CB'A' = 180^\circ$, то есть четырехугольник $DNA'B$ — вписанный. Значит, $\angle NBD = \angle NA'D = \angle NA'B'$. Но угол $NA'B'$ равен углу NCB' в силу того, что точки C, A', B' и N, как мы уже отмечали, лежат на одной окружности с диаметром CH. Поэтому равны углы NCA и NBA, то есть точка N лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Продолжим прямую NH до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке K. Так как угол CNK прямой, CK — диаметр этой окружности. Значит, углы CAK и CBK прямые. Поэтому отрезок AK параллелен BB', а отрезок BK параллелен AA'. Но отсюда $AKBH$ — параллелограмм, и прямая NK делит AB пополам, что и требовалось доказать.

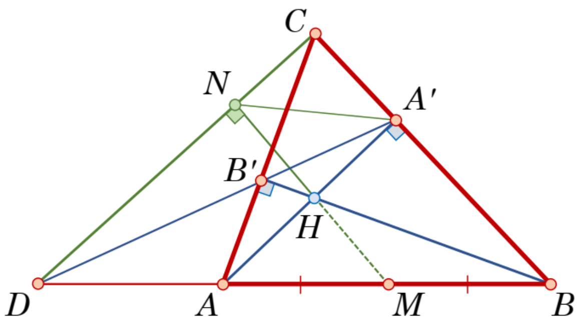

Рис. 1

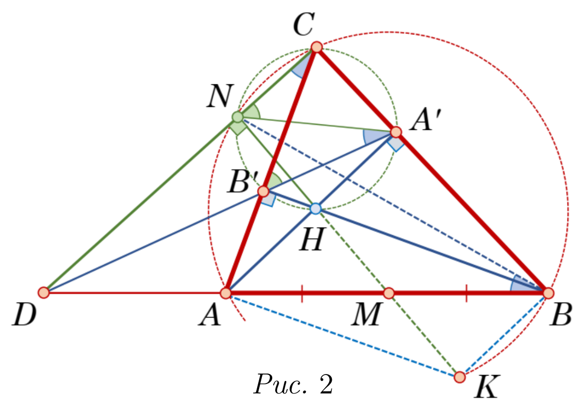

Рис. 2

6. В «решении» не рассмотрен случай, когда точки A, B и M лежат на одной прямой, то есть не образуют треугольник. В самом деле, если M не принадлежит прямой AB, то указанная сумма расстояний $AM + BM$ больше 2 (неравенство треугольника). В случае, когда точка M лежит на прямой AB вне отрезка AB, эта сумма также больше 2. Остаётся единственно возможный случай — точка M лежит на отрезке AB, то есть $y = 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $y = 0$.

7. Рассуждения в «решении» будут верными, если значение $x = \sqrt{2}$ действительно удовлетворяет исходному уравнению. Проверим равенство

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 4. \tag{1}$$

Бесконечное количество операций возведения в степень означает, что мы имеем дело с предельным равенством, поэтому последнее равенство (1) равносильно $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$, где $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ и $a_1 = \sqrt{2}$. Последовательность a_n — возрастающая и ограниченная, поэтому имеет предел α, причём $\sqrt{2}^{\alpha} = \alpha$. Поскольку все члены последовательности меньше 2, значение α также не больше 2, то есть $\alpha \neq 4$, и значит, равенство (1) не выполняется.

Ответ: нет корней.

8. Ошибка состоит в том, что некоторые способы выбора подсчитаны несколько раз. Например, в этом подсчёте дважды учтены такие случаи: 1) отдельно выбран красный карандаш A, а среди девяти других есть красный карандаш B; 2) отдельно выбран красный карандаш B, а среди девяти других есть красный карандаш A.

Приведём правильное решение. Количество способов выбрать любые 10 карандашей из 40 равно C_{40}^{10}, а количество способов выбрать 10 карандашей, среди которых нет красных — C_{35}^{10}. (Для этого подсчёта достаточно «вынуть» красные карандаши из коробки.) Следовательно, искомое количество способов равно $C_{40}^{10} - C_{35}^{10}$. Другое решение основано на подсчёте количеств способов выбрать ровно один красный карандаш, ровно 2 красных карандаша, ровно 3 красных, ровно 4 красных и ровно 5 красных карандашей. В таком случае мы получаем $C_5^1C_{35}^9 + C_5^2C_{35}^8 + C_5^3C_{35}^7 + C_5^4C_{35}^6 + C_5^5C_{35}^5$.

Ответ: $C_{40}^{10} - C_{35}^{10}$.

9. Первая ошибка в приведенном «решении» состоит в том, что не рассмотрен случай, когда совпадают решения $(y_0; x_0)$ и $(-x_0; -y_0)$, то есть случай, когда $y_0 = -x_0$. Подставив $y = -x$ в уравнения системы, приходим к равенствам $2x^2 = 2a^2$ и $-x^2 = 2a^2 + 3a$, и значит, $-a^2 = 2a^2 + 3a$, откуда $a = 0$, $a = -1$.

Вторая ошибка «решения» — нет проверки найденных значений $a = 0$ и $a = -3$.

При $a = 0$ система имеет только одно решение $(0, 0)$.

При $a = -3$ система состоит из уравнений $x^2 + y^2 = 18$ и $xy = 9$. Умножая второе уравнение на -2 и складывая с первым, получим $(x - y)^2 = 0$, то есть $x = y$. В этом случае система имеет ровно два решения $(3; 3)$ и $(-3; -3)$.

При $a = -1$ система имеет вид: $x^2 + y^2 = 2$ и $xy = -1$. Умножая второе уравнение на 2 и складывая с первым, получим $(x + y)^2 = 0$, то есть $x = -y$. В этом случае система также имеет ровно два решения $(1; -1)$ и $(-1; 1)$.

Ответ: $a = -3$, $a = -1$.

10. Указанное свойство возрастающих функций действительно верно. Однако в данном случае $g(x) = x^2 - 6$ не является обратной функцией к f.

Действительно, $g(f(x)) = f^2(x) - 6 = x$, но $f(g(x)) = \sqrt{g(x) + 6} = |\,x\,|$. Это выражение совпадает с x только для неотрицательных x. Можно сказать ещё так: обратной функцией к f будет функция g, заданная только для $x \geqslant 0$. Однако ниоткуда не следует, что корни уравнения неотрицательны.

Приведём верное решение уравнения. Положим $y = \sqrt{x + 6}$. При ограничениях $x \geqslant -6$, $y \geqslant 0$ получаем систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + 6}, \\ x^2 - 6 = y. \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 - 6 = x, \\ x^2 - 6 = y. \end{cases}$$

С учетом ограничений на переменные преобразование является равносильным. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(y - x)(y + x + 1) = 0$.

1) $y = x$, тогда $x^2 - 6 = x$ — уравнение, которое нам уже встречалось. С учетом ограничений корнем будет $x = 3$.

2) $y + x + 1 = 0$, тогда $x^2 - 6 = -1 - x$, то есть $x^2 + x - 5 = 0$, корни $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{26})$. Поскольку $y = -x - 1 \geqslant 0$, получаем ограничения $-6 \leqslant x \leqslant -1$, которым удовлетворяет только корень $x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{26})$.

Ответ: $x = 3$, $x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{26})$.